Über eine neue Erweiterung von Ringen. II

Von J. SZÉP in Szeged

In der ersten Mitteilung[1]) haben wir folgendes Ringerweiterungsproblem gelöst:

Es seien A und B zwei beliebige ($\neq 0$) Ringe. Darzustellen sind diejenigen Ringe R, für welche

$$R^+ = A^+ + B^+, \quad A \cap B = 0$$

gilt.

Solche Ringe R haben wir kurz zerlegbare Ringe genannt und durch $R = A \dot{+} B$ bezeichnet.

Zwecks Lösung des Erweiterungsproblems haben wir die vier (eindeutigen) Funktionen

(1) $$a^b,\ {}^b a \in A; \quad b^a,\ {}^a b \in B \quad (a \in A;\ b \in B)$$

eingeführt, und mit Hilfe dieser Funktionen die Multiplikation in R^+ durch

(2) $$ab = a^b + {}^a b, \quad ba = {}^b a + b^a$$

und

(3) $$(a+b)(a'+b') = aa' + ba' + ab' + bb' \quad (a, a' \in A;\ b, b' \in B)$$

definiert.

Damit die aus dem Modul R^+ vermittels (2) und (3) hervorgehende Struktur mit zwei Operationen ein Ring sei, ist es notwendig und hinreichend, daß die Funktionen (1) die folgenden Bedingungen erfüllen:

(4) $$a^0 = {}^0 a = 0^a = {}^a 0 = b^0 = {}^0 b = 0^b = {}^b 0 = 0,$$

(5) $$a^{b+b'} = a^b + a^{b'}, \qquad {}^{b+b'} a = {}^b a + {}^{b'} a,$$
$$b^{a+a'} = b^a + b^{a'}, \qquad {}^{a+a'} b = {}^a b + {}^{a'} b,$$

(6) $$(a+a')^b = a^b + a'^b, \qquad {}^b(a+a') = {}^b a + {}^b a',$$

---

[1]) *Acta Sci. Math.*, 19 (1958), 51—62.

$$
\begin{array}{lll}
 & (b+b')^a = b^a + b'^a, & {}^a(b+b') = {}^ab + {}^ab', \\
(7) & (a^b)^{b'} = a^{bb'}, & {}^{b'}({}^ba) = {}^{b'b}a, \\
 & (b^a)^{a'} = b^{aa'}, & {}^{a'}({}^ab) = {}^{a'a}b,
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
(8) & (aa')^b = aa'^b + a^{{}^{a'}b}, & {}^b(aa') = {}^baa' + {}^{b^a}a', \\
 & (bb')^a = bb'^a + b^{{}^{b'}a}, & {}^a(bb') = {}^abb' + {}^{a^b}b',
\end{array}
$$

$$
(9) \qquad (a^b)a' + {}^{{}^ab}a' = a^{b^{a'}} + a({}^ba'), \quad (b^a)b' + {}^{{}^ba}b' = b^{a^{b'}} + b({}^ab'),
$$

$$
(10) \qquad ({}^ba)^{b'} = {}^b(a^{b'}), \qquad ({}^ab)^{a'} = {}^a(b^{a'}).
$$

Weiterhin haben wir uns in der erwähnten ersten Mitteilung mit mehreren allgemeinen Eigenschaften der Ringe $R = A \dotplus B$ beschäftigt.

In der vorliegenden Mitteilung werden wir nun einige spezielle Klassen zerlegbarer Ringe untersuchen.

§ 1.

In diesem Paragraphen beschäftigen wir uns mit denjenigen Ringen $R = A \dotplus B$, für welche

$$
(11) \qquad ab = ba
$$

bei beliebigen $a \in A$ und $b \in B$ gilt.

In diesem Falle gilt offenbar

$$
(12) \qquad {}^ba = a^b, \quad {}^ab = b^a.
$$

Dementsprechend reduziert sich die Anzahl der unter (1) auftretenden Funktionen auf zwei. Auch die Anzahl der die Lösung des Erweiterungsproblems beschreibenden Bedingungen (4)—(10) erfährt eine Herabsetzung. Und zwar gewinnen wir die der Bedingung (11) genüge leistenden Ringe $R = A \dotplus B$ durch Lösung der folgenden Funktionalgleichungen:

$$
(13) \qquad a^0 = 0^a = b^0 = 0^b = 0,
$$

$$
(14) \qquad a^{b+b'} = a^b + a^{b'}, \qquad b^{a+a'} = b^a + b^{a'},
$$

$$
(15) \qquad (a+a')^b = a^b + a'^b, \quad (b+b')^a = b^a + b'^a,
$$

$$
(16) \qquad (a^b)^{b'} = a^{bb'}, \qquad (b^a)^{a'} = b^{aa'},
$$

$$
(17) \qquad (aa')^b = aa'^b + a^{b^{a'}} = a^ba' + a'^{b^a}, \quad (bb')^a = bb'^a + a^{a^{b'}} = b^ab' + b'^{a^b},
$$

$$
(18) \qquad (a^b)^{b'} = (a^{b'})^b, \qquad (b^a)^{a'} = (b^{a'})^a.
$$

Unter Berücksichtigung von (12) entstehen nämlich die Gleichungen (13), (14), (15), (16), (17) und (18) der Reihe nach aus den Gleichungen (4), (5), (6), (7), (8) und (10). Da ferner in unserem Falle die Gleichungen (9) die Gestalt

$$(19) \qquad (a^b)a' + a'^{b^a} = a^{b^{a'}} + a(a'^b), \quad (b^a)b' + b'^{a^b} = b^{a^{b'}} + b(b'^a)$$

haben, sieht man sofort ein, daß (19) schon in (17) enthalten ist.

Auf die Struktur der der Bedingung (11) genügenden Ringe $R = A \dot{+} B$ bezieht sich der folgende

Satz 1. *In jedem der Bedingung* (11) *genügenden Ring* $R = A \dot{+} B$ *gibt es ein Ideal* $\mathfrak{c}$, *für welches* $\mathfrak{c} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ ($\mathfrak{a} \subseteq A$; $\mathfrak{b} \subseteq B$) *und* $R/\mathfrak{c} \approx A/\mathfrak{a} \dot{+} B/\mathfrak{b}$ *ist, wobei* $R/\mathfrak{c}$ *ein kommutativer Ring ist.*

Beweis. Sind die Ringe A und B beide kommutativ, so ist offenbar auch R kommutativ, und für $\mathfrak{c}$ kann insbesondere das Nullideal gewählt werden.

Nehmen wir jetzt an, daß von den Ringen A und B mindestens einer, z. B. B nichtkommutativ ist. Es sei $bb' - b'b \neq 0$ ($b, b' \in B$). Dann ergibt sich unter Anwendung von (14), (16) und (18) $a^{bb'-b'b} = 0$ für jedes Element $a \in A$. Somit gibt es in R (nach den Sätzen 3 und 4 unserer ersten Mitteilung) ein maximales Linksideal $\mathfrak{b}$ ($\neq 0, \subseteq B$) (welches in B ein Ideal ist und die Kommutatoren von B offenbar enthält, und) welches wegen (11) auch in R ein Ideal ist. Auf ähnliche Weise erbringt man den Nachweis der Existenz eines maximalen Ideals $\mathfrak{a} \subseteq A$ von R. Offenbar gilt

$$R/\mathfrak{b} \approx A \dot{+} (B/\mathfrak{b}).$$

Der Ring $B/\mathfrak{b}$ ist bereits kommutativ. Im Gegenfall könnte man nämlich (ähnlich wie vorher) zeigen, daß es im Ring ein Ideal $0 \neq \mathfrak{b}' \subseteq B/\mathfrak{b}$ gibt, woraus dann die Existenz in R eines $\bar{\mathfrak{b}} \supset \mathfrak{b}$ folgen würde, was jedoch der Maximalität von $\mathfrak{b}$ widerspricht.

Man zeigt auf ähnliche Weise, daß auch der Ring $A/\mathfrak{a}$ kommutativ ist, woraus sich dann die Behauptungen unseres Satzes sofort ergeben.

Folgerung. Es ist in R jedes Ideal $\mathfrak{v}$, welches ein einfacher Ring ist und für welches $\mathfrak{v} \nsubseteq \mathfrak{c}$ ($= \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$) gilt, ein Körper oder ein Zeroring von Primzahlordnung. Offenbar gilt nämlich $\mathfrak{v} \cap \mathfrak{c} = 0$, weshalb $R/\mathfrak{c}$ einen zu $\mathfrak{v}$ isomorphen Unterring enthält, woraus aber die Kommutativität von $\mathfrak{v}$ folgt. Da nun $\mathfrak{v}$ ein einfacher Ring ist, folgt daraus unsere Behauptung.

Satz 2. *Es sei* $R = A \dot{+} B$ *ein zerlegbarer Ring, für welchen die Bedingung* (11) *gilt. Dann besitzt* R *die folgenden Eigenschaften:*

a) *Ist* $a + b$ ($a \in A$; $b \in B$) *ein linksseitiges* (*rechtsseitiges*) *Einselement in* R, *so ist dieses* $a + b$ *zugleich Einselement, und*

b) *die Elemente* $a' - aa' \, (= a'^b)$ *bzw.* $b' - bb' \, (= b'^a)$ $(a' \in A;\ b' \in B)$ *bilden in* A *bzw. in* B *je ein Ideal* $\mathfrak{a}$ *bzw.* $\mathfrak{b}$, *und der Modul* $\mathfrak{a}^+ + \mathfrak{b}^+$ *ist ein Teilring* L *von* R, *für welchen* $L = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ *gilt.*

Dem Beweis dieses Satzes schicken wir zwei Hilfssätze voraus.

Hilfssatz. *In einem Ring* $R = A \dotplus B$ *ist* $a + b$ $(a \in A;\ b \in B;\ a + b \neq 0)$ *dann und nur dann linksseitiges Einselement, falls die Bedingungen*

$$ {}^b a' = a' - aa', \quad {}^a b' = b' - bb', \tag{20} $$

$$ b^{a'} = 0, \qquad a^{b'} = 0 \tag{21} $$

für beliebige Elemente $a' \in A$ *und* $b' \in B$ *gelten, und* $a + b$ $(a \in A;\ b \in B;\ a + b \neq 0)$ *ist dann und nur dann rechtsseitiges Einselement von* R, *falls die Bedingungen*

$$ a'^b = a' - a'a, \quad b'^a = b' - b'b, \tag{22} $$

$$ {}^{a'} b = 0, \qquad {}^{b'} a = 0 \tag{23} $$

für beliebige Elemente $a' \in A$ *und* $b' \in B$ *gültig sind.*

Beweis. Ist $a + b$ linksseitiges Einselement von R, so gelten die Gleichungen

$$ (a + b)a' = aa' + b^{a'} + {}^b a' = a' $$

und

$$ (a + b)b' = a^{b'} + {}^a b' + bb' = b' $$

aus welchen man unter Berücksichtigung von $A \cap B = 0$

$$ aa' + {}^b a' = a', \; b^{a'} = 0 \quad \text{und} \quad a^{b'} = 0, \; {}^a b' + bb' = b' $$

folgert. Aus diesen Gleichungen kann man nunmehr die Behauptungen unseres Satzes bezüglich des linksseitigen Einselementes ohne weiteres ablesen. Auf ähnliche Weise erbringt man den Nachweis der Behauptungen unseres Satzes bezüglich des rechtsseitigen Einselementes.

Hilfssatz 2. *Ist* $a + b$ *das Einselement des Ringes* $R = A \dotplus B$, *so gilt*

$$ a = a, \; b^2 = b, \; ab = ba = 0. $$

Beweis. Aus (21) und (23) folgt $ab = a^b + {}^a b = 0$ und $ba = b^a + {}^b a = 0$, weiterhin gilt wegen $(a + b)(a + b) = a^2 + b^2 = a + b$ $a^2 = a$ und $b^2 = b$.

Beweis des Satzes 2. Auf Grund von (12) und mit Rücksicht auf (20) und (22) gelten die Relationen

$$ a' - aa' = a' - a'a, $$
$$ b' - bb' = b' - b'b $$

für beliebige Elemente $a' \in A$ und $b' \in B$. Daraus folgt aber $aa' = a'a$ und $bb' = b'b$, weshalb $a+b$ das Einselement von R ist. Hiermit haben wir die erste Behauptung unseres Satzes bewiesen.

Um den Nachweis auch der zweiten Behauptung unseres Satzes zu erbringen, zeigen wir vor allem, daß die Elemente $a' - aa'$ $(= a'^b)$ bzw. $b' - bb'$ $(= b'^a)$ je ein Ideal von A bzw. B bilden. Dies folgt sofort aus den leicht einzusehenden Gleichungen

$$a' - aa' + a'' - aa'' = a' + a'' - a(a' + a''),\quad b' - bb' + b'' - bb'' = b' + b'' - b(b' + b''),$$

$$(a' - aa')(a'' - aa'') = a'a'' - aa'a'',\quad (b' - bb')(b'' - bb'') = b'b'' - bb'b'',$$

$$(a' - aa')a'' = a'a'' - aa'a'',\quad a''(a' - aa') = a''a' - aa''a',$$

$$(b' - bb')b'' = b'b'' - bb'b'',\quad b''(b' - bb') = b''b' - bb''b' \quad (a', a'' \in A;\ b', b'' \in B).$$

Da zugleich auch die Gleichung

$$(a' - aa')(b' - bb') = (b' - bb')(a' - aa') = 0$$

besteht, haben wir damit den Nachweis der Behauptung b) und auch den Beweis von Satz 2 vollendet.

B e m e r k u n g. Unter Anwendung der beiden zum Satz 2 gehörigen Hilfssätze können wir durch eine einfache Rechnung auch die beiden folgenden Behauptungen beweisen:

a) Sind A und B die durch das Element a bzw. b erzeugten Ringe, dann sind diejenigen zerlegbaren Ringe $R = A \dot{+} B$, in welchen $a+b$ Einselement ist, durch die direkte Summe der Ringe A und B gegeben, d. h. es gilt $R = A + B$.

b) Es seien A und B die durch das Element a bzw. b erzeugten Ringe. Damit das Element $a+b$ in dem zerlegbaren Ring $R = A \dot{+} B$ linksseitiges Einselement sei, ist notwendig und hinreichend, daß aus jeder in B gültigen Gleichung

$$\sum_j l_j b^j = 0$$

das Bestehen der Gleichung

$$\sum_j l_j (1-a)^j a = 0$$

und aus jeder in A gültigen Gleichung

$$\sum_i k_i a^i = 0$$

das Bestehen der Gleichung

$$\sum_i k_i (1-b)^i b = 0$$

folgt. (Hierbei sind die l_j und k_i ganze Zahlen, $\sum_j l_j(1-a)^j a$ bzw. $\sum_i k_i(1-b)^i b$ ist eine kürzere Schreibweise für $\sum_j l_j\left(a-\binom{j}{1}a^2+\cdots+\right.$ $\left.+(-1)^j\binom{j}{j}a^{j+1}\right)$ bzw. $\sum_i k_i\left(b-\binom{i}{1}b^2+\cdots+(-1)^i\binom{i}{i}b^{i+1}\right)$ und im Falle wo A bzw. B kein Einselement hat, ist die Rolle des Elements 1 bloß formal.)

Falls für die beiden Ringe A und B die erwähnten Bedingungen gelten, so hat unser Problem eine einzige Lösung welche durch die folgenden Funktionen beschrieben werden kann:

$$\begin{aligned} {}^{\sum_j l_j b^j} a' &= \sum_j l_j(1-a)^j a', \quad a'^{b'}=0 \\ {}^{\sum_i k_i a^i} b' &= \sum_i k_i(1-b)^i b', \quad b'^{a'}=0 \end{aligned} \qquad (a'\in A;\quad b'\in B)$$

Ein dem Satz 2 ähnlicher Satz läßt sich im Falle beweisen, wo R einen Linksannullator enthält. Wir haben nämlich den folgenden

Satz 3. *Es sei* $R=A\dotplus B$ *ein die Bedingung* (11) *erfüllender Ring. Ist* $a+b$ *ein Links- (bzw. Rechts-) annullator von* R, *so gilt*

a) $a+b$ *ist ein Annullator von* R,

b) die Elemente $-a'^b(=aa')$ *bzw.* $-b'^a(=bb')$ *bilden je ein Ideal* $\mathfrak{a}$ *bzw.* $\mathfrak{b}$ *von* A *bzw.* B, *ferner ist* $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ *ein Zeroring und ein Ideal in* R.

Dem Beweis des Satzes schicken wir zwei Hilfssätze voraus.

Hilfssatz 1. $a+b$ $(a\in A;\ b\in B)$ *ist dann und nur dann Linksannullator im Ring* $R=A\dotplus B$, *falls die Gleichungen*

$$^b a' = -aa', \quad {}^a b' = -bb' \tag{24}$$

und

$$b^{a'}=0, \qquad a^{b'}=0 \tag{25}$$

für beliebige Elemente $a'\in A$ *und* $b'\in B$ *gelten, und* $a+b$ $(a\in A;\ b\in B)$ *ist dann und nur dann Rechtsannullator im Ring* R, *falls die Gleichungen*

$$a'^b=-a'a, \quad b'^a=-b'b, \tag{26}$$

$$^{a'}b=0, \qquad {}^{b'}a=0 \tag{27}$$

für beliebige Elemente $a'\in A$ *und* $b'\in B$ *gelten.*

Beweis. Ist $a+b$ Linksannullator in R, so gilt

$$(a+b)a' = aa' + {}^b a' + b^{a'} = 0$$

und

$$(a+b)b' = a^{b'} + {}^a b' + bb' = 0.$$

Daraus folgen wegen $A \cap B = 0$

$$aa' + {}^{b}a' = 0, \quad b^{a'} = 0$$

und

$$a^{b'} = 0, \quad {}^{a}b' + bb' = 0,$$

woraus man die Behauptungen des Hilfssatzes bezüglich des Linksannullators ohne weiteres ablesen kann.

Das über den Rechtsannullator gesagte läßt sich ähnlich beweisen.

Hilfssatz 2. *Ist $a+b$ ein Annullator von R, so gilt*

(28) $$a^2 = b^2 = 0, \; ab = ba = 0.$$

Beweis. Aus (25) und (27) folgen die Relationen $ab = a^b + {}^{a}b = 0$ und $ba = b^a + {}^{b}a = 0$, sodann ergibt sich unter Anwendung derselben $(a+b)(a+b) = a^2 + b^2 = 0$, woraus sich die Behauptung des Hilfssatzes ablesen läßt.

Beweis von Satz 3. Aus (24) und (26) folgt (mit Rücksicht auf (12))

$$a'a = aa', \; b'b = bb'$$

für beliebige Elemente $a' \in A$ und $b' \in B$. Daraus folgt, daß $a+b$ ein Anullator von R ist.

Da die Gleichungen

$$aa' + aa'' = a(a' + a''), \; bb' + bb'' = b(b' + b''), \qquad (a', a'' \in A; b', b'' \in B)$$
$$aa'aa'' = a^2a'a'' = 0, \quad bb'bb'' = b^2b'b'' = 0$$

bestehen, bilden die Elemente $aa' (= -a'^{b})$ bzw. $bb' (= -b'^{a})$ in A bzw. in B je einen Zeroring $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}$, ferner sind diese Ringe wegen

(29) $a''(aa') = a(a''a'), \; (aa')a'' = a(a'a''), \; b''(bb') = b(b''b'), \; (bb')b'' = b(b'b'')$

Ideale in A bzw. in B.

Zugleich zeigen die Relationen

$$aa'\,bb' = bb'\,aa' = aba'b' = 0,$$

daß $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ ein Zeroring ist. Mit Rücksicht auf (16) und (17) auf (24)—(27) gilt

$$b'aa' = aa'b' = (aa')^{b'} + b'^{aa'} = (aa')^{b'} = aa'^{b'} \in \mathfrak{a}$$

und auf ähnliche Weise

$$a'bb' = bb'a' = (bb')^{a'} + a'^{bb'} = (bb')^{a'} = bb'^{a'} \in \mathfrak{b}.$$

Daraus und aus (29) folgen

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})a' \subseteq \mathfrak{a} + \mathfrak{b}, \quad (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})b' \subseteq \mathfrak{a} + \mathfrak{b},$$
$$a'(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \subseteq \mathfrak{a} + \mathfrak{b}, \quad b'(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \subseteq \mathfrak{a} + \mathfrak{b}.$$

Man sieht also, daß die direkte Summe $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ ein Ideal in R ist. Damit haben wir sämtliche Behauptungen von Satz 3 bewiesen.

Bemerkung. Unter Anwendung der beiden zum Satz 3 gehörigen Hilfssätze kann man durch eine einfache Rechnung die Richtigkeit der beiden folgenden Behauptungen zeigen:

a) Es seien A und B die durch das Element a bzw. b erzeugten Ringe. Diejenigen zerlegbaren Ringe $R=A\dotplus B$, in welchen $a+b$ ein Annullator ist, ergeben sich als die direkte Summe von A und B.

b) Es seien A und B die durch das Element a bzw. b erzeugten Ringe. Damit im Ring $R=A\dotplus B$ das Element $a+b$ ein Linksannullator ist, ist es notwendig und hinreichend, daß aus jeder in B gültigen Gleichung

$$\sum_j l_j b^j = 0 \quad \text{die Gleichung} \quad \sum_j (-1)^j l_j a^{j+1} = 0$$

und aus jeder in A gültigen Gleichung

$$\sum_i k_i a^i = 0 \quad \text{die Gleichung} \quad \sum_i (-1)^i k_i b^{i+1} = 0$$

folgt (wobei l_j, k_i ganze Zahlen bedeuten). Gelten diese Bedingungen für die Ringe A und B, so ist der Ring $R=A\dotplus B$ eindeutig bestimmt, und kann durch die folgenden Funktionen beschrieben werden:

$$a'^{\sum_j l_j b^j} = \sum_j (-1)^j l_j a^j a', \qquad b'^{\sum_i k_i a^i} = \sum_i (-1)^i k_i b^i b',$$

$$a'^{b'} = 0,\ b'^{a'} = 0 \qquad (a' \in A;\ b' \in B).$$

Satz 4. *Falls der Ring $R=A\dotplus B$ die Bedingung* (11) *erfüllt, und eine der Komponenten, z. B. A, ein Zeroring ist, so gibt es in R ein Ideal $\mathfrak{b}\subseteq B$ derart, daß A ein Ideal im Ring $A\dotplus B/\mathfrak{b}(\approx R/\mathfrak{b})$ ist.*

Beweis. Da A ein Zeroring ist, gilt nach (17) $a^{b^{a'}}=0$ $(a, a' \in A;\ b \in B)$. Gilt nun $b^{a'}=0$ für jedes a' und b, so ist (nach Satz 3 unserer ersten Mitteilung und mit Rücksicht auf (11)) A ein Ideal in R, wobei die Rolle von $\mathfrak{b}$ durch das Ideal $0\ (\subset B)$ übernommen wird.

Nehmen wir jetzt an, daß $b^{a'}=0$ nicht für alle a' gültig ist. Dann gibt es ein Element $b'(=b^{a'})\neq 0$ derart, daß $a^{b'}=0$ für jedes Element a richtig ist. Sodann gibt es in B (erste Mitteilung, Satz 3) ein maximales Ideal $0\neq\mathfrak{b}\subseteq B$, welches (wegen (11)) auch in R ein Ideal ist. Für den Ring $A\dotplus B/\mathfrak{b}$ gilt offenbar $R/\mathfrak{b}\approx A\dotplus B/\mathfrak{b}$. Nun ist A ein Ideal im Ring $A\dotplus B/\mathfrak{b}$. Im Gegenfall würde nämlich (ähnlich wie vorher) $B/\mathfrak{b}$ ein Ideal $\mathfrak{d}$ enthalten, und dieses wäre zugleich Ideal auch in $A\dotplus B/\mathfrak{b}$. Daraus würde aber folgen, daß R ein Ideal $\mathfrak{b}' \supset \mathfrak{b}$ enthält, im Widerspruch zur Maximalität von $\mathfrak{b}$ in R. Damit haben wir unseren Satz bewiesen.

Folgerung. Genügt der Ring $R = A \dotplus B$ der Bedingung (11), und sind A und B beide Zeroringe, so enthält R ein Ideal $\mathfrak{a}(\subseteq A)$ und ein Ideal $\mathfrak{b}(\subseteq B)$ derart, daß der Faktorring $R/\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ ein Zeroring ist.

§ 2.

In diesem Paragraphen beschäftigen wir uns mit Ringen $R = A \dotplus B$, bei welchen A und B beide Zeroringe sind. (Die Bedingung (11) setzen wir nicht voraus.)

Sind in einem Ring $R = A \dotplus B$ A und B beide Zeroringe, so gestalten sich die Gleichungen (7)—(10) folgendermaßen:

$$(a^b)^{b'} = {}^{b'}({}^b a) = (b^a)^{a'} = {}^{a'}({}^a b) = 0, \tag{30}$$

$$a^{a'^b} = {}^{b^a} a' = b^{b'^a} = {}^{a^b} b' = 0, \tag{31}$$

$${}^{a_b} a' = a^{b^{a'}}, \quad {}^{b_a} b' = b^{a^{b'}}, \tag{32}$$

$$({}^b a)^{b'} = {}^b(a^{b'}), \quad ({}^a b)^{a'} = {}^a(b^{a'}). \tag{33}$$

Satz 5. *Es seien im zerlegbaren Ring $R = A \dotplus B$ A und B Zeroringe, und es seien die Bedingungen*

$$a^{b^{a'}} = b^{a^{b'}} = ({}^b a)^{b'} = ({}^a b)^{a'} = 0 \qquad (a, a' \in A;\ b, b' \in B) \tag{34}$$

für beliebige Elemente a, a', b, b' erfüllt. Dann gibt es im Ring R ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ und ein Ideal $\mathfrak{b} \subseteq B$, derart, daß im Ring $R/\mathfrak{a} \approx A/\mathfrak{a} \dotplus B$, bzw. im Ring $R/\mathfrak{b} \approx A \dotplus B/\mathfrak{b}$, B bzw. A ein Ideal ist, und der Faktorring $R/\mathfrak{a}+\mathfrak{b} \approx A/\mathfrak{a} + B/\mathfrak{b}$ ein Zeroring ist.

Beweis. In Hinblick auf die Relationen (30)—(34) gelten die Gleichungen

$$a'^a b = a'^{a_b} + {}^{a'}({}^a b) = 0,$$
$${}^a b a' = {}^{a_b} a' + ({}^a b)^{a'} = 0,$$
$$a' b^a = a'^{b^a} + {}^{a'}(b^a) = 0,$$
$$b^a a' = {}^{b^a} a' + (b^a)^{a'} = 0,$$

welche zeigen, daß die Elemente ${}^a b$ und b^a ein in B enthaltendes Ideal von R erzeugen (welches durch den Ring A annulliert wird). Auf ähnliche Weise zeigt man, daß die Elemente ${}^b a$ und a^b ein in A liegendes Ideal von R

erzeugen (welches durch den Ring B annulliert wird). Wir unterscheiden zwei Fälle.

Fall 1. Gilt ${}^{a}b = b^{a} = 0$ für beliebige Elemente a und b, so ist (wie man leicht einsieht) der Ring A ein Ideal in R. Ähnlicherweise, wenn $a^{b} = {}^{b}a = 0$ für jedes a und jedes b erfüllt ist, dann ist der Ring B ein Ideal in R. In diesen Fällen sind die Behauptungen unseres Satzes offenbar gültig.

Fall 2. Nehmen wir jetzt an, daß nicht der vorhergehende der Fall ist. Dann gibt es ein Element $a(\neq 0)$, derart, daß z. B. ${}^{a}b = 0$ nicht für jedes b erfüllt ist. Dann hat R wegen (31) und (34) ein maximales Ideal $\mathfrak{b} \subseteq B$. Offenbar gilt

$$R/\mathfrak{b} \approx A \dotplus B/\mathfrak{b}.$$

A und $B/\mathfrak{b}$ sind Zeroringe, ferner hat $A \dotplus B/\mathfrak{b}$ kein in $B/\mathfrak{b}$ enthaltenes Ideal (andernfalls könnte nämlich $\mathfrak{b}$ in R nicht maximal sein) so, daß $A \dotplus B/\mathfrak{b}$ ein zum Fall 1 gehöriger zerlegbarer Ring ist, folglich A ein Ideal in $A \dotplus B/\mathfrak{b}$ sein muß. Man zeigt ähnlich, daß im Fall, wo weder A noch B ein Ideal in R ist, R ein maximales Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ enthält, wofür

$$R/\mathfrak{a} \approx A/\mathfrak{a} \dotplus B$$

ist, ferner B ein Ideal im Ring $A/\mathfrak{a} \dotplus B$ ist. Die letzte Behauptung des Satzes folgt sofort aus dem Gesagten.

Satz 6. *Es seien im zerlegbaren Ring $R = A \dotplus B$ A und B Zeroringe. Dann gibt es in R zwei Ideale $\mathfrak{a} \subseteq A$ und $\mathfrak{b} \subseteq B$ derart, daß für die Elemente des Faktorringes*

$$R/\mathfrak{a} + \mathfrak{b} \approx A/\mathfrak{a} \dotplus B/\mathfrak{b}$$

die Relationen (34) *gültig sind.*

Beweis. Wir können annehmen, daß im Ring $R = A \dotplus B$ die Bedingungen (34) nicht erfüllt sind. Andernfalls kann man nämlich $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} = 0$ setzen.

Nehmen wir z. B. an, daß die Funktionen $b^{a^{b'}}$, ${}^{a}(b^{a'})$ nicht alle gleich Null sind. Der durch die Elemente $b^{a^{b'}}$ und ${}^{a}(b^{a'})$ erzeugte Ring $\mathfrak{b}'$ ist von Null verschieden, ist ein Ideal in R, und wird durch die Elemente von A annulliert. Mit Rücksicht auf (30) und (31) gelten nämlich die Relationen

$$\bar{a}\,{}^{b_a}b' = {}^{\bar{a}}({}^{b_a}b') + \bar{a}^{{}^{b_a}b'} = 0,$$

$${}^{b_a}b'\,\bar{a} = {}^{{}^{b_a}b'}(\bar{a}) + ({}^{b_a}b')^{\bar{a}} = {}^{b^{a^{b'}}}\bar{a} + (b^{a^{b'}})^{\bar{a}} = 0,$$

$$\bar{a}\,{}^{a}(b^{a'}) = \bar{a}^{{}^{a}(b^{a'})} + {}^{\bar{a}}({}^{a}(b^{a'})) = 0,$$

$${}^{a}(b^{a'})\,\bar{a} = {}^{{}^{a}(b^{a'})}\bar{a} + ({}^{a}(b^{a'}))^{\bar{a}} = {}^{({}^{a}b)^{a'}}\bar{a} + (({}^{a}b)^{a'})^{\bar{a}} = 0.$$

Es sei $\mathfrak{b}(\supseteq \mathfrak{b}')$ das maximale in B enthaltene Ideal von R. Dann gilt

$$R/\mathfrak{b} \approx A \dotplus B/\mathfrak{b}.$$

Der Ring $A \dotplus B/\mathfrak{b}$ enthält kein von Null verschiedenes Ideal $\bar{\mathfrak{b}} \subseteq B/\mathfrak{b}$, da dies der Maximalität von $\mathfrak{b}$ widersprechen würde. Daraus folgt, daß für die, sich auf den Ring $A \dotplus B/\mathfrak{b}$ beziehenden Funktionen $\bar{b}^{a^{\bar{b}'}}$, $({}^{a}\bar{b})^{a'}$ $(a, a' \in A;\ \bar{b}, \bar{b}' \in B/\mathfrak{b})$ die Relation $\bar{b}^{a^{\bar{b}'}} = ({}^{a}\bar{b})^{a'} = 0$ erfüllt ist.

Ähnlich zeigt man, daß es in R ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ gibt, für welches

$$R/\mathfrak{a} \approx A/\mathfrak{a} \dotplus B$$

gilt, wobei im Ring $A/\mathfrak{a} \dotplus B$ die Relationen $\bar{a}^{b^{\bar{a}'}} = 0$ und $({}^{b}\bar{a})^{b'} = 0$, $(b, b' \in B;$ $\bar{a}, \bar{a}' \in A/\mathfrak{a})$ gelten. Aus dem Gesagten folgt sofort, daß für die Elemente des Faktorringes

$$R/\mathfrak{a} + \mathfrak{b} \approx A/\mathfrak{a} \dotplus B/\mathfrak{b}$$

(34) erfüllt ist.

§ 3.

In diesem Paragraphen beschäftigen wir uns mit denjenigen zerlegbaren Ringen $R = A \dotplus B$, bei welchen A und B Schiefkörper sind.

Bezüglich der Funktionen a^{b}, ${}^{b}a$, b^{a}, ${}^{a}b$ haben wir bereits in unserer ersten Mitteilung die Gültigkeit der folgenden Relationen erwähnt:

(35) ist $a^{b} = 0$ so ist B Linksideal in R,

(36) ist ${}^{b}a = 0$ so ist B Rechtsideal in R,

(37) ist $b^{a} = 0$ so ist A Linksideal in R,

(38) ist ${}^{a}b = 0$ so ist A Rechtsideal in R.

Wir werden den Ring $R = A \dotplus B$ einfach, zweifach, dreifach oder vierfach entartet nennen, je nachdem in R von den Relationen (35)—(38) eine, zwei, drei oder alle vier gleichzeitig erfüllt sind. (Im vierfach entarteten Fall ist R die direkte Summe von A und B.)

Satz 7. *Sind im Ring $R = A \dotplus B$ A und B Schiefkörper, so ist R ein mindestens zweifach entarteter Ring.*

Beweis. Wir betrachten zuerst die Funktion a^{b}. Vor allem ist es klar, daß der durch die Elemente $a^{b} (\in A)$ $(a \in A;\ b \in B)$ erzeugte Ring A' in A ein Linksideal ist. Gemäß (8) gilt nämlich die Relation

$$\bar{a}a^{b} = (\bar{a}a)^{b} - \bar{a}^{a^{b}}$$

für jedes Element $\bar{a} \in A$. Da A ein Schiefkörper ist, gilt entweder $A' = 0$

oder $A' = A$. Auf ähnliche Weise sieht man ein, daß der durch die Elemente ${}^{b}a$ erzeugte Ring A'' in R ein Rechtsideal ist, wobei entweder $A'' = 0$ oder $A'' = A$ gilt.

Ist $A' = 0$, d. h. gilt $a^{b} = 0$ für jedes $a \in A$ und $b \in B$, so ist B ein Linksideal in R.

Nunmehr sei $A' = A$. Es sei e_B das Einselement von B. Dann gilt nach (8)

$$ {}^{a}b = {}^{a}(b\,e_B) = {}^{a}b e_B + {}^{a^b}e_B = {}^{a}b + {}^{a^b}e_B , $$

woraus ${}^{a^b}e_B = 0$ folgt. Wegen $A' = A$ und mit Rücksicht auf (5) und (7) gilt

$$ {}^{a}e_B = 0 \tag{39} $$

für jedes Element $a \in A$. Weiterhin gelten auf Grund von (7) und (8) (und wegen (4) und (39)) die Relationen

$$ a^{b} = a^{b e_B} = (a^{b})^{e_B}, \tag{40} $$

$$ (a^{b}\bar{a}^{\bar{b}})^{e_B} = a^{b}(\bar{a}^{\bar{b}})^{e_B} + (a^{b})^{\bar{a}^{\bar{b}} e_B} = a^{b}\bar{a}^{\bar{b}}. \tag{41} $$

Wegen $A' = A$ gilt auf Grund von (40) und (41) (mit Rücksicht auf (6))

$$ a^{e_B} = a. \tag{42} $$

Das Element e_B ist ein rechtsseitiges Einselement in R, denn unter Anwendung von (39) und (42) folgt

$$ a e_B = a^{e_B} + {}^{a}e_B = a. $$

Bisher haben wir also folgendes gezeigt:

(43) ist $A' = 0$ so ist B Linksideal in R,
ist $A' = A$ so ist e_B rechtsseitiges Einselement in R.

Es seien nunmehr A'', B', B'' die durch die Elemente ${}^{b}a$, b^{a}, ${}^{a}b$ der Reihe nach in A bzw. in B erzeugten einseitigen Ideale. Ganz ähnlich wie im Falle der Elemente a^{b} sieht man folgendes ein:

(44) ist $A'' = 0$, so ist B Rechtsideal in R,
(45) ist $A'' = A$, so ist e_B linksseitiges Einselement in R,
(46) ist $B' = 0$, so ist A Linksideal in R,
(47) ist $B' = B$, so ist e_A rechtsseitiges Einselement in R,
(48) ist $B'' = 0$, so ist A Rechtsideal in R,
(49) ist $B'' = B$, so ist e_A linksseitiges Einselement in R.

(e_A ist das Einselement in A).

Man sieht leicht ein, daß von den vier Fällen $A' = A$, $A'' = A$, $B' = B$, $B'' = B$ glechzeitig höchstens zwei in R auftreten können. Andernfalls muß nämlich von den folgenden zwei Möglichkeiten die eine gewiß eintreten: a) e_A ist ein linksseitiges, e_B ein rechtsseiteges Einselement, b) e_B ist ein linksseitiges, e_A ein rechtsseitiges Einselement. In beiden Fällen gelangt man zu einem Widerspruch; gilt z. B. a), so erhält man $e_A e_B = e_A = e_B$ und dies widerspricht der Bedingung $A \cap B = 0$. Da von den Fällen (43)—(49) in R vier eintreten (zwei für A und zwei für B), ist die Behauptung des Satzes somit bewiesen.

Bemerkung 1. Im Laufe des Beweises hat sich etwas mehr herausgestellt als im Satze behauptet wurde. Die Relationen (43)—(49) erteilen uns nämlich Auskunft auch über die in R gespielte Rolle der Elemente e_A und e_B. Ist z. B. B ein Ideal und A kein einseitiges Ideal in R, so ist e_A ein Einselement in R.

Bemerkung 2. Ist im Ring $R = A \dotplus B$ (A, B sind Schiefkörper) z. B. A ein Linksideal, dann gilt für ein beliebiges Element b von B entweder $Ab = A$ oder $Ab = 0$. Wäre nämlich $Ab = A' \subset A$ ($A' \neq 0$), so wäre A' (wegen $aA' = a(Ab) = (aA)b = Ab = A'$) in A ein Linksideal, was ein Widerspruch ist. Gilt außerdem für ein einziges Element $b (\neq 0)$ $Ab = 0$, so gilt $Ab' = 0$ für jedes Element b' von B. Die Elemente b' mit $Ab' = 0$ bilden nämlich ein Rechtsideal $\mathfrak{b}'$ von B. Es gilt ja $A(\mathfrak{b}'b'') = (A\mathfrak{b}')b'' = 0$ für beliebiges $b'' \in B$, also $\mathfrak{b}'b'' \subset \mathfrak{b}'$. Ähnliches gilt, wenn A ein Rechtsideal in R ist. Ist A ein Rechts- und B ein Linksideal in R, so ist $AB = 0$.

Im zweifach entarteten Fall können wir leicht ein Beispiel konstruieren. Es seien A und B isomorphe Schiefkörper und $a_i \leftrightarrow b_i$ ($a_i \in A$; $b_i \in B$) ein gegebener Isomorphismus. Die Relationen $a_i b_j = b_i b_j$ und $b_j a_i = a_j a_i$ definieren einen Ring $R = A \dotplus B$, in dem A und B Rechtsideale sind.

(Eingegangen am 1. April 1959)